

Expandmat – Descrierea soluției

Autor,
Alexandra Udriștoiu, studentă Universitatea București

Se observă că fiecare triplet (x, y, let) depinde de o singură poziție din matricea inițială. Așadar, pornind de la $(x_n, y_n, \text{let}_n) = (x, y, \text{let})$ dat, trebuie să aflăm (x_1, y_1, let_1) , cu semnificația: pentru ca (x, y, let) să fie adevărat, în matricea inițială, pe poziția x_1, y_1 trebuie să se găsească litera let_1 .

Dacă știm (x_k, y_k, let_k) din matricea B de dimensiune $2^k \times 2^k$, putem afla știm $(x_{k-1}, y_{k-1}, \text{let}_{k-1})$ din matricea C de dimensiune $2^{k-1} \times 2^{k-1}$ prin calcul, văzând în care dintre cele patru submatrice se află (x_k, y_k, let_k) și cum a fost aceasta formată din matricea C.

Apoi, putem calcula $d[x][y][\text{let}] = \text{numărul de triplete pentru care } (x_1, y_1, \text{let}_1) = (x, y, \text{let})$. Cum literele de pe fiecare poziție se pot alege independent una de cealaltă, soluția finală va fi:

$$\max(d[1][1][\text{let}], \text{pentru } \text{let} \in [a, z]) + \max(d[1][2][\text{let}], \text{pentru } \text{let} \in [a, z]) \\ + \max(d[2][1][\text{let}], \text{pentru } \text{let} \in [a, z]) + \max(d[2][2][\text{let}], \text{pentru } \text{let} \in [a, z])$$

Complexitatea acestei soluții este $O(Q \cdot N)$ și obține 100 de puncte.

Ideea anterioară poate fi implementată și ca o parcurgere simultană a reprezentărilor binare pentru x și y , descrescător după rang. Perechea de biți $(x[i], y[i])$, care poate fi 00, 01, 10 sau 11 arată a cărei zone din tabloul de dimensiuni $2^i \times 2^i$ îi corespunde poziția (x, y) conform figurii următoare:

00	01
10	11

În cazul în care avem perechea 11 va trebui să ținem seama de rotirea cu 180 grade.

Astfel avem următoarele situații și gestionăm trei contoare $c3, c4$ și rot

- cazul 00, nu facem nimic
- cazul 01, dacă rot este par, atunci crește $c3$, altfel crește $c4$
- cazul 10, dacă rot este par, atunci crește $c4$, altfel crește $c3$
- cazul 11, crește rot

Poziția finală va fi dată de ultimul bit și vom ține seama și de paritatea pentru rot . Caracterul final se va obține cu formula $(\text{caracter_citit} + c3 * 23 + c4 * 4) \% 26$.

Complexitatea este aceeași $O(N \cdot Q)$.

Această idee de implementare permite o precalculare pentru secvențe de lungime \sqrt{N} și apoi complexitatea $O(\sqrt{N} \cdot Q)$.

Problema nondecreasing – descrierea soluției

Autor,
prof. Dan Pracsu, Liceul Teoretic Emil Racoviță Vaslui

Fie s șirul de litere, indexat de la 1, iar n – lungimea sa. Construim vectorul t de lungime n în care $t[i]$ reține valoarea numerică asociată caracterului $s[i]$.

Deci $t[i] = s[i] - 'a' + 1$, pentru $i = 1..n$

Definim de asemenea funcția $Cost(i, j) = \text{costul transformării caracterului care are numărul asociat } i \text{ în caracterul care are asociat numărul } j$:

$Cost(i, j) = 0$, dacă $i = j$

$Cost(i, j) = i + j$, dacă $i \neq j$

Definim pentru $j = 1..n$:

$a[i][j] = \text{costul minim necesar pentru a construi din } s[1..j] \text{ un șir crescător, ultimul caracter de pe poziția } j \text{ având asociat numărul } i \text{ (} i = 1..26 \text{)}$

Date inițiale:

$a[i][1] = Cost(i, t[1])$

Recurențe:

$a[i][j] = \min\{a[k][j-1] + cost(i, t[j]), k=1..i\}, j=2..n, i=1..26$

Soluția: $\min\{a[i][n], i=1..26\}$

Complexitatea este $O(n * \Sigma)$ sau $O(n * \Sigma * \Sigma)$, în funcție de implementarea sau nu a unor minime parțiale pentru calculul mai rapid al valorii lui $a[i][j]$. Valoarea Σ este dimensiunea alfabetului, deci 26.

Descrierea soluției – npath

Autor,
prof. Cheșcă Ciprian, Liceul Tehnologic “Grigore C. Moisil” Buzău

Varianta 1 (PINEX și combinatorică)

Considerăm cunoscut rezultatul care afirmă că numărul de căi distincte de lungime minimă dintr-o grilă în care sunt prezente toate liniile, din origine până în colțul de coordonate (a,b) , este $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$, unde $\binom{x}{y}$ reprezintă combinații de x luate câte y .

Să analizăm ce se întâmplă când ștergem o singură linie.

Să presupunem că această linie începe în punctul de coordonate (x,y) și este așezată pe orizontală.

Numărul de căi distincte **ce trec** prin această linie se poate calcula ca produsul dintre numărul de căi din origine până în punctul de coordonate (x,y) și numărul de căi din punctul de coordonate $(x+1,y)$ și (n,n) adică $\binom{x+y}{x} \cdot \binom{n-x-1+n-y}{n-x-1}$.

Numărul cerut de problemă va fi diferența dintre numărul total de căi din grilă, adică $\binom{2n}{n}$ și produsul anterior.

Un raționament analog putem face și dacă linia este ștearsă pe verticală.

Să analizăm ce se întâmplă când ștergem două linii.

Numărul căutat se poate calcula astfel: din numărul total de căi se scade numărul de căi ce trec prin una din linii, apoi scădem numărul de căi ce trec prin cealaltă linie, apoi trebuie să adunăm o singură dată numărul de căi ce trec prin ambele linii simultan (am aplicat principiul includerii și excluderii)

Generalizând acest procedeu putem calcula numărul cerut prin generarea tuturor submulțimilor unei mulțimi cu k elemente, pentru a putea calcula toate produsele de câte $1, 2, \dots, k$ termeni ce trebuie adunate sau scăzute dintr-o sumă ce inițial

este egală cu $\binom{2n}{n}$, conform principiului includerii și excluderii.

Această soluție are ordin de complexitate $O(2^k)$ și obține aproximativ 50 puncte (până la $k \leq 15$).

Varianta 2 (recurență pe matrice – programare dinamică)

Pentru ca o cale să fie de lungime minimă este necesar ca toate căile să fie formate din linii așezate pe verticală în sus sau pe orizontală către dreapta, în caz contrar ar apărea trasee cu lungime mai mare.

Toate traseele minime au lungime $2 \cdot n$.

Vom calcula numărul cerut de problemă recurent astfel.

Vom folosi o matrice **m** cu următoarea semnificație:

$m[i][j]$ = numărul total de căi pentru a ajunge în punctul de coordonate (i, j) .

$m[0][0] = 0$.

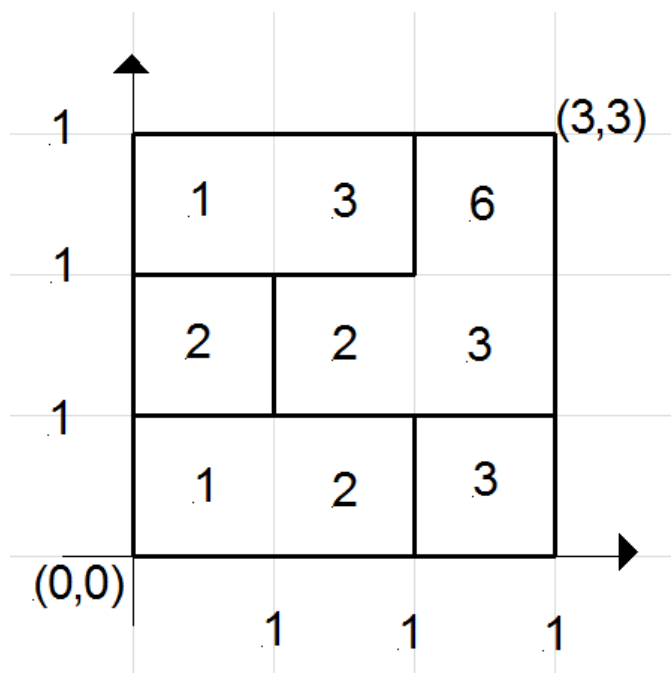
Dacă nu ar fi ștersă nici o linie din matrice, relația de recurență ar fi: $m[i][j] = m[i][j-1] + m[i-1][j]$.

Cum unele linii sunt șterse atunci vom folosi o altă matrice **a** pentru a păstra informațiile despre liniile șterse în felul următor:

- $a[i][j] = 0$ dacă din poziția (i, j) nu se șterge nici o linie
- $a[i][j] = 1$ dacă din poziția (i, j) s-a șters o linie orizontală
- $a[i][j] = 2$ dacă din poziția (i, j) s-a șters o linie verticală
- $a[i][j] = 3$ dacă din poziția (i, j) s-au șters și o linie orizontală și una verticală;

Se adaptează apoi relația de recurență potrivit cu informațiile din matrice **a**.

Modul de formare al recurenței pe matricea din exemplul problemei este următorul:



Așadar inițial $m[0][0] = 0$ iar numărul de căi până în punctele situate pe axa Ox respectiv pe axa Oy se calculează separat cu ajutorul a doi vectori; în cazul de mai sus sunt toate 1.

Apoi dacă pentru a ajunge la punctul de coordonate (i, j) sunt prezente ambele linii atunci $m[i][j] = m[i][j-1] + m[i-1][j]$, dacă este prezentă doar linia orizontală $m[i][j] = m[i][j-1]$, dacă este prezentă doar linia verticală $m[i][j] = m[i-1][j]$ iar dacă nu este prezentă nici o linie $m[i][j] = 0$.

Această soluție are ordin de complexitate $O(n^2)$, deci nu depinde de mărimea lui k și obține 100 puncte.

Echipa care a pregătit setul din probleme pentru această rundă a fost formată din:

- studenta Alexandra - Maria Udriștoiu, Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea din București.
- student Alexandru Petrescu, University of Oxford, Keble College.
- student Adrian-Emanuel Dicu, Facultatea de Automatică și Calculatoare, Universitatea Politehnică din București.
- student Mihai-Cristian Popescu, Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea Babeș-Bolyai din Cluj-Napoca.
- student Denis-Andrei Banu, Facultatea de Informatică, Universitatea Alexandru Ioan Cuza din Iași
- profesor Ionel-Vasile Piț-Rada, Colegiul Național "Traian", Drobeta-Turnu Severin.
- profesor Ciprian Cheșcă, Liceul Tehnologic "Grigore C. Moisil", Buzău.
- profesor Eugen Nodea, Colegiul Național "Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.
- profesor Dan Pracsiu, Liceul Teoretic "Emil Racoviță", Vaslui.